BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* 2009

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕАРИЗИРУЕМЫХ ЗАДАЧ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

З.С.АЛИЕВ
Бакинский Государственный Университет
z_aliyev@mail.ru

Рассматривается нелинеаризируемые возмущения задачи Штурма-Лиувилля четвёртого порядка со спектральным параметром в граничном условии. Доказывается существование неограниченного континуума множества положительных решений этой задачи.

Рассмотрим следующую нелинейную задачу:

$$l(y) \equiv y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' = \lambda y(x) + f(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \lambda) +$$
$$+ g(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \lambda), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$
$$y'(0)\cos\alpha - y''(0)\sin\alpha = 0, \tag{2.а}$$
$$y(0)\cos\beta + Ty(0)\sin\beta = 0, \tag{2.б}$$
$$y'(l)\cos\gamma + y''(l)\sin\gamma = 0, \tag{2.в}$$
$$(a\lambda + b)y(l) - (c\lambda + d)Ty(l) = 0, \tag{2.г}$$

где q - неотрицательная абсолютно непрерывная функция на $[0,l], Ty \equiv y''' - qy', \alpha, \beta, \gamma, a, b, c, d$ - действительные постоянные, причём $0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi/2$, $\sigma = bc - ad > 0$. Функции f и g принадлежат классу $C\left([0,l] \times R^5\right)$ и удовлетворяют условиям:

$$\left|\frac{f(x,u,s,v,w,\lambda)}{u}\right| \le M,\ \forall x \in [0,l],\ \forall u,s,v,w \in R,\ 0 < |u| \le 1,\ |s|,|v|,|w| \le 1,\ \forall \lambda \in R, \tag{3}$$

где M - положительная постоянная;

$$g(x,u,s,v,w,\lambda) = 0(|u| + |s| + |v| + |w|) \quad \text{при} \quad |u| + |s| + |v| + |w| \to 0 \tag{4}$$

равномерно по $(x,\lambda) \in [0,l] \times \Lambda$ для каждого ограниченного промежутка $\Lambda \subset R$.

Нелинейные задачи четвёртого порядка, когда спектральный параметр не входит в граничные условия, исследованы в работах $[1,2]$. Задача (1),(2) в случае $f \equiv 0$ изучена в работе $[3]$. Из-за присутствия в уравнений (1) нелинейного члена f, имеющего подлинейный рост, оно не всегда допускает линеаризацию. Поэтому для исследования вопроса бифуркации решений задачи (1),(2), как и в случаях бифуркации нелинейных задач, рассмотренных в работах $[1,2,4,5]$, следует изучать бифуркации от интервалов. Хотя задача (1),(2) нелинеаризируема в окрестности нуля, но всё таки связана с линейной задачей

$$l(y) = \lambda y, \quad (\lambda, y) \in \Gamma.У., \tag{5}$$

где $\Gamma.У.$ является множеством пар $(\lambda, y(x))$, удовлетворяющих граничным условиям (2).

Через $\Gamma.У.^0$ обозначим множество функции, удовлетворяющих граничным условиям $(2.а,б,в)$.

Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ - возрастающая последовательность положительных простых собственных значений задачи $l(y) = \lambda y, \ \ y \in \Gamma.У.^0, \ \ y(1) = 0$ $[6]$. Число N определим из неравенства $\mu_{N-1} < -\dfrac{d}{c} \leq \mu_N$, где $\mu_0 = -\infty$. Задача (5) детально исследована в работе $[7]$, где, в частности, доказана: существует неограниченно возрастающая последовательность простых собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ задачи (5), причём $\lambda_n > 0$ при $n \geq 3$. Соответствующие им собственные функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), ...$ обладают следующими осцилляционными свойствами:

$а$) если $c = 0$, то $y_n(x)$ при $n \geq 2$ имеет $n-1$ простых нулей, $y_1(x)$ имеет m_1 простых нулей в интервале $(0, l)$, где $m_k = \begin{cases} 0 \ \ \textit{при} \ \lambda_k \in [\xi_1, \mu_1), \\ \sum\limits_{\xi_s \geq \lambda_k} i(\xi_s) \ \ \textit{при} \ \lambda_k \in (-\infty, \xi_1), \end{cases}$ $k = 1,2,$

$i(\xi_s)$ - индекс осцилляции собственного значения ξ_s задачи $l(y) = \lambda y, \ \ y \in \Gamma.У.^0$, $iy(0) = 0$ при $\beta \in (0, \pi/2]$ либо $y''(0) = 0$ при $\beta = 0$ [8];

$б$) если $c \neq 0$ $N = 1$, то $y_1(x)$ имеет m_1 простых нулей, $y_2(x)$ имеет m_2 простых нулей, $y_n(x)$, $n \geq 3$ имеет $n-2$ простых нулей, в интервале $(0, l)$;

c) если $c \neq 0$ и $N \geq 2$, то $y_1(x)$ имеет m_1 простых нулей, $y_n(x)$, $n \geq 2$, при $n \leq N$ имеет $n-1$ простых нулей, а при $n > N$ имеет $n-2$ простых нулей, в интервале $(0, l)$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\lambda_1 \in (0, \mu_1)$, $\lambda_2 > \mu_1$.

Пусть $E = C^3[0, l] \cap \Gamma.У.^0$ - банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_{C^3[0,l]}$.

Определим множества $S^v = \{y \in E : y(x) \neq 0, \ x \in (0, l)$; если $y''(\xi) = 0, \ \xi \in (0, l)$, то $y'(x)Ty(x) < 0$ в окрестности точки ξ; если $y'(\mu)Ty(\mu) = 0, \ \mu \in (0, l)$, то $y(x)y''(x) < 0$
в окрестности точки $\mu, \lim\limits_{x \to 0} vy(x) = 1\}, \ \ v = +, -, S = S^+ \cup S^-$ (см. $[3]$).

Справедлива следующая

Лемма 1 $[3]$. Множества S^+, S^- и S являются открытыми подмножествами в E. Если $y \in \partial S^v (\partial S)$, то $y(x)$ имеет по крайней мере один четырёхкратный нуль в $[0, l]$.

Наряду с задачей (1),(2) рассмотрим следующую аппроксимационную задачу

$$l(y) = \lambda y + f(x, |y|^{\varepsilon} y, y', y'', y''', \lambda) + g(x, y, y', y'', y''', \lambda), (\lambda, y) \in \Gamma.У. . \tag{6}$$

Имеет место следующая

Лемма 2. Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $0 \le \varepsilon_n < 1$, - некоторая последовательность, сходящаяся к нулю. Если существует последовательность $\{\lambda^{(n)}, y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R \times S^{\nu}$ такая, что $(\lambda^{(n)}, y_n)$ является решением задачи (6), соответствующей $\varepsilon = \varepsilon_n$, и $(\lambda^{(n)}, y_n)$ сходится к $(\lambda^*, 0)$ в $R \times E$, то $\lambda^* \in I = [\lambda_1 - M, \lambda_1 + M]$.

Доказательство. Положим $w_n = y_n / \|y_n\|_3$. Обозначив

$$g_n(x) = \frac{g(x, y_n(x), y_n'(x), y_n''(x), y_n'''(x), \lambda^{(n)})}{\|y_n\|_E}$$

и

$$f_n(x) = \frac{f(x, |y_n(x)|^{\varepsilon_n} y_n(x), y_n'(x), y_n''(x), y_n'''(x), \lambda^{(n)})}{\|y_n\|_E}$$

получим, что w_n является решением следующей задачи

$$l(w_n) = \lambda^{(n)} w_n + f_n(x) + g_n(x), (\lambda^{(n)} w_n) \in \text{Г.У.}. \qquad (7)$$

Так как $\{w_n\}$ ограничена в C^3, $\{f_n\}$ ограничена в C и $g_n \to 0$ в C, то из (7) следует, что $\{w_n\}$ ограничена в C^4. Тогда, по теореме Арцела-Асколи, можно утверждать, что $w_n \to w$ в C^3, $\|w\|_3 = 1$ и $w \in \overline{S^{\nu}}$.

Если $w \in \partial S^{\nu}$, то, в силу леммы 1, существует $\tau \in [0, l]$ такая, что $w_n^{(s)}(\tau) \to 0$ при $n \to \infty$, $s = \overline{0,3}$. Можем взять $\|y_n\|_E \le 1$ так, что $|f_n(x)| \le M |w_n(x)|$ в силу (3). Из (7) получаем:

$$\left|w_n^{(4)}\right| \le K(|w_n| + |w_n'| + |w_n''| + |w_n'''| + \rho_n), \qquad (8)$$

где

$$K = M + \max_{x \in [0,l]} |q(x)| + \max_{x \in [0,l]} |q'(x)|, \quad \rho_n = \max_{x \in [0,l]} |g_n(x)|, \ \lim_{n \to \infty} \rho_n = 0.$$

Пусть $v_n = (w_n, w_n', w_n'', w_n''')^T$, норма которой в R^4 задается следующим образом: $|v_n| = |w_n| + |w_n'| + |w_n''| + |w_n'''|$. Очевидно, что $|v_n(\tau)| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

В силу (8) имеем

$$|v_n'| \le (k+1)(|v_n| + \rho_n). \qquad (9)$$

Интегрирование неравенства (9) от τ до x приводит к неравенству

$$|v_n(x)| \le |v_n(\tau)| + (k+1) l \rho_n + (k+1) \int_{\tau}^{x} |v_n(t)| dt. \qquad (10)$$

Применив неравенство Гронуолла, из (10) получаем оценку:

$$|v_n(x)| \le \widetilde{K}(|v_n(\tau)| + (k+1) l \rho_n),$$

где $\widetilde{K}$ - некоторая положительная постоянная. Так как $|v_n(\tau)| \to 0$, $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$, то $w_n \to 0$ в C^3 при $n \to \infty$, которое противоречит к $w_n \to w$ в C^3 при $n \to \infty$ и $\|w\|_E = 1$. Следовательно, $w \in S^{\nu}$.

Через y_1^{ν} обозначим нормированную собственную функцию, соответствующую собственному значению λ_1 задачи (5), принадлежащую множеству S^{ν}.

В силу (1) имеем

$$\int_0^l (y_1^v l(w_n) - w_n l(y_1^v))dx = (\lambda^{(n)} - \lambda_1)\int_0^l w_n y_1^v dx + \int_0^l f_n(x) y_1^v dx + \int_0^l g_n(x) y_1^v dx . \quad (11)$$

Используя формулу интегрирования по частям, из (11) получаем:

$$y_1^v(l)Tw_n(l) - w_n(l)Ty_1^v(l) = (\lambda^{(n)} - \lambda_1)\int_0^l w_n y_1^v dx + \int_0^l f_n(x) y_1^v dx + \int_0^l g_n(x) y_1^v dx . \quad (12)$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, из (12) находим

$$y_1^v(l)Tw(l) - w(l)Ty_1^v(l) = (\lambda^* - \lambda_1)\int_0^l w y_1^v dx + \lim_{n\to\infty}\int_0^l f_n(x) y_1^v dx . \quad (13)$$

В силу условия $\sigma = bc - ad > 0$, функция $\varphi(\lambda) = \dfrac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$ является строго убывающей в интервалах $\left(-\infty, -\dfrac{d}{c}\right)$ и $\left(-\dfrac{d}{c}, +\infty\right)$.

Принимая во внимание краевое условие (2.*г*), из (13) получаем

$$(\varphi(\lambda^*) - \varphi(\lambda_1))y_1^v(l)w(l) = (\lambda^* - \lambda_1)\int_0^l w y_1^v dx + \lim_{n\to\infty}\int_0^l f_n(x) y_1^v dx . \quad (14)$$

Так как $w, y_1^v \in S^v$, то

$$\left|\lim_{n\to\infty}\int_0^l f_n(x) y_1^v dx\right| \le M\int_0^l w y_1^v dx . \quad (15)$$

В силу (14) и (15) имеем: если $\lambda^* \ge \lambda_1$, то $(\lambda^* - \lambda_1)\int_0^l w y_1^v dx - M\int_0^l w y_1^v dx \le 0$, следовательно $\lambda^* \le \lambda_1 + M$; если $\lambda^* \le \lambda_1$, то $(\lambda^* - \lambda_1)\int_0^l w y_1^v dx + M\int_0^l w y_1^v dx \ge 0$, следовательно $\lambda^* \le \lambda_1 - M$. Таким образом, $\lambda^* \in I$. Лемма 2 доказана.

Существование решений задачи (6), принадлежащих $R \times S^v$, следует из теоремы 2 работы [3].

Пусть S замыкание в $R \times E$ множества нетривиальных решений задачи (1)-(2), $\mathsf{S}^v = \mathsf{S} \cap S^v$.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. Для каждого v связная компонента D^v множества $\mathsf{S}^v \cup (I \times \{0\})$ содержит $I \times \{0\}$, неограничена в $R \times E$ и содержится в $(R \times S^v) \cup (I \times \{0\})$.

Заметим, что из утверждения теоремы следует существование неограниченного континуума Φ^v множества S, бифурцирующегося от $I \times \{0\}$, т.е. $\Phi^v \cap I \times \{0\} \ne \varnothing$ и $\Phi^v \subset (R \times S^v) \cup I \times \{0\}$. $\Phi^v \subset D^v$; но отметим, что не необходимо иметь $\Phi^v = D^v \cap \mathsf{S}$. Фактически D^v является объединением всех таких компонент Φ^v и $I \times \{0\}$.

Доказательство теоремы 1 проводится по схеме доказательства теоремы 4.2 из [2], использованием леммы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Махмудов А.П., Алиев З.С. Некоторые глобальные результаты для нелинейных нелинеаризируемых задач Штурма-Лиувилля четвёртого порядка // ДАН СССР, 1989, т.309, №1, с.34-38.
2. Махмудов А.П., Алиев З.С. Некоторые глобальные результаты для нелинейных спектральных задач Штурма-Лиувилля четвёртого порядка // Дифференциальные уравнения, 1993, т.29, №8, с.1330-1339.
3. Aliyev Z.S. Bifurcation from zero or infinity in some nonlinear fourth order problem with spectral parameter in the boundary condition // Trans. NAS of Azerb., series of physical-technical and mathematical sciences, 2008, v. 28, №4, p.17-26.
4. Berestycki H. On some nonlinear Sturm-Liouville problems // J. Different. Equat., 1977, v.26, p.375-390.
5. Rynne B.P. Bifurcation from zero or infinity in Sturm-Liouville problems which are not linearizable. // J. Math. Anal. And Appl., 1998, v.228, p.141-156.
6. Banks D.O., Kurovski G.J. A Prufer transformation for the equation of the vibrating beam subject to axial forces // Diff. Equat., 1977, v.24, p.57-74.
7. Kerimov N.B., Aliyev Z.S. The oscillation properties of the boundary value problem which spectral parameter in the boundary condition // Trans. NAS of Azerb., series of physical-technical and mathematical sciences, 2005, v. 25, №7, p.61-68.
8. Амара Ж.Бен, Владимиров А.А. Об осцилляции собственных функций задачи четвёртого порядка со спектральным параметром в граничном условии // Фундаментальная и прикладная математика, 2006, т.12, №4, с.41-52.

SƏRHƏD ŞƏRTİNƏ SPEKTRAL PARAMETR DAXİL OLAN XƏTTİLƏŞMƏYƏN DÖRDÜNCÜ TƏRTİB ŞTURM-LİUVİLL MƏSƏLƏLƏRİNİN MÜSBƏT HƏLLƏRİ HAQQINDA

Z.S.ƏLİYEV

XÜLASƏ

İşdə sərhəd şərtinə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib Şturm-Liuvill məsələsinin xəttiləşməyən həyəcanlamalarına baxılır. Bu məsələlərin müsbət həllərinin qeyri-məhdud kontinuumunun varlığı isbat edilir.

ON A POSITIVE SOLUTION OF A FOURTH ORDER NONLINEARIZABLE STURM-LIOUVILLE PROBLEM WITH SPECTRAL PARAMETER IN THE BOUNDARY CONDITION

Z.S.ALIYEV

SUMMARY

The article deals with the nonlinearizable perturbations of a fourth order Sturm-Liouville problem with spectral parameter in the boundary condition. The existence of an unbounded continuum of positive solutions of these problems is proved.